

前 言

数学是充满人文精神的科学，数学文化就是蕴含于数学科学及其探求过程之中的人文精神。作为文化素质教育的一个重要部分，国内许多高校陆续开设了数学文化类课程，并在探索 and 实践中积累了丰富的经验。2016 年，海军工程大学开始开设“数学文化欣赏”选修课，作为该校课程体系科学文化知识模块中的一门学科文化研讨课程。通过对该课程的学习，可以强化学生科学文化知识的结构，并从数学文化中汲取人文精神，为数学课程的学习和应用起到积极的引导作用。于是，我们萌发了自己编写一本教材的想法。

更进一步促成我们将自编《数学文化欣赏》教材的想法付诸行动的因素有：璀璨的数学文化构成编写教材时选材的无尽源泉；军校特定的人才培养目标对课程教育功能的特殊要求；军地高校的数学文化课程建设经验可以借鉴；传播文化、引领欣赏源于笔者对数学文化教育的满腔热忱；大学训练部装备处、理学院应用数学系的领导和同仁给予的热情鼓励，以及本教材获得海军工程大学教材编写立项的支持。

数学文化对于促进人类文化的发展做出了重要的贡献，对人的思想、人的精神世界和人文素质有着巨大的影响，其教育功能亟待进一步发挥。数学文化的世界精彩纷呈、内容丰富多彩，各种专著涉猎的范围十分广泛。特别是，数学与军事的联系源远流长，并在互相促进中共同发展。编写本书除了思考欣赏什么、如何欣赏的问题外，考虑欣赏者的特点也至关重要。因此，作为一本面向普通高等院校非数学专业大学生的文化素质教材，本书的选材从教学对象的适用性层面做了较多的考虑。

本书的组织结构带有试验和探讨的性质，以数学简史、数学的美、数学名题和趣味题等内容为载体，力求阐明数学的思想、方法与文化意义，阐述数学的发展对促进人类文明发展的作用，指出了数学与爱情、文学、艺术和教育等方面的联系，特别是介绍了解析几何、微积分、概率论与数理统计等大学生必修课程的思想方法及其文化影响。除此之外，结合军校人才培养目标的特点，突出了数学与军事、数学与信息技术的广泛而深刻的联系。

本书的编写团队由 6 名同志组成，编写方案由胡伟文、徐忠昌拟定。全书由十二章组成。其中，第一章、第七章由张舒编写，第二章、第五章由刘海涛编写，第三章、第八章由艾小川编写，第四章、第六章由李凌编写，第九章、第十章由徐忠昌编写，第十一章、第十二章由胡伟文编写。统稿工作由胡伟文、徐忠昌完成。应用数学系主任宋业新教授在百忙之中审阅了全部书稿。

编写本书时我们参考了国内外众多数学文化专家的研究成果，因而参考资料甚多。在本书末尾列出主要的参考文献并在书中各引用处分别标出，但仍难免挂一漏万，敬请见



谅. 这里, 编者对所有参考文献的作者表示衷心的感谢. 同时, 感谢宋业新教授审阅后提出的宝贵意见, 感谢科学出版社在本书的策划、出版过程中所付出的辛勤劳动.

本书得到海军工程大学教材出版基金的资助, 特此致谢.

由于编者的水平有限, 错误在所难免. 真挚地期望各位读者不吝赐教.

编 者

2016 年 8 月于武汉

目 录

第一章 数学与人类文明	1
第一节 数学的定义、内容和特点	1
第二节 数学对人类文明的贡献	4
第三节 数学发展简史	6
第四节 现代数学的发展趋势	16
第二章 中国古代数学	22
第一节 中国古代文化中的数学	22
第二节 《算经十书》简介	28
第三节 中国古代数学名题赏析	32
第四节 中国古代数学的主要特征	44
第三章 数的起源与发展历史	50
第一节 数的初始发展	50
第二节 数的现代发展	53
第三节 数学符号的发展历史	59
第四节 数的本质的哲学思考	62
第四章 解析几何的思想方法与意义	64
第一节 解析几何产生的背景	64
第二节 笛卡儿与《几何学》	66
第三节 费马与他的解析几何	70
第四节 解析几何的进一步完善和发展	72
第五章 微积分的思想方法与意义	77
第一节 古代微积分思想的萌芽	77
第二节 微积分思想的酝酿时期	79
第三节 微积分的创立	82
第四节 微积分的完善与发展	88
第五节 微积分思想方法举例	92
第六节 微积分的思想文化意义	95
第六章 概率统计的思想方法与意义	99
第一节 概率论思想的演变与发展	99
第二节 数理统计思想的演变与发展	104
第三节 概率统计的思想文化意义	108



第七章 数学美	112
第一节 数学美的特征	113
第二节 数学思想方法中的美	126
第三节 数学美的地位和作用	129
第四节 未来数学发展的方向——真、善、美的统一	133
第八章 数学名题及其文化意义	135
第一节 费马大定理	135
第二节 哥德巴赫猜想	140
第三节 四色猜想	143
第四节 希尔伯特的 23 个数学问题	146
第五节 21 世纪七大数学难题	150
第九章 数学趣味题及其文化意义	154
第一节 古今中外的数学趣味题	154
第二节 称重问题	160
第三节 约瑟夫问题	163
第四节 平面密铺问题	166
第五节 “抓三堆”	174
第六节 数学趣味题的文化意义	185
第十章 数学与信息技术	187
第一节 数学与“老三论”	187
第二节 数学与“新三论”	192
第三节 数学与计算机	199
第四节 数学与网络技术	203
第五节 数学机械化	206
第十一章 数学与军事	214
第一节 数学与军事的历史渊源	214
第二节 军事运筹学简介	219
第三节 兰彻斯特方程	224
第四节 数学素质与军事指挥艺术	231
第十二章 数学与其他	237
第一节 数学与爱情	237
第二节 数学与文学	242
第三节 数学与艺术	250
第四节 数学与教育	254
参考文献	260

第一章 数学与人类文明

数学是科学的大门和钥匙.

——罗杰·培根(Roger Bacon, 1214—1293)

数学是我们时代有势力的科学,它不声不响地扩大它所征服的领域;那种不用数学为自己服务的人将会发现数学被别人用来反对自己.

——赫尔巴特(J. F. Herbart, 1776—1841)

所以这就是数学:它赋予自己的发现以生命;它令思维活跃,精神升华;它烛照我们的内心,消除了我们与生俱有的蒙昧与无知.

——普罗克鲁斯(Proclus, 410—485)

第一节 数学的定义、内容和特点

一、数学的定义

数学是一个历史的概念,数学的内涵随着时代的变化而变化,给数学下一个一劳永逸的定义是不可能的,也是没有必要的.在这里,我们将从历史的角度来谈谈“什么是数学”.

(1)公元前4世纪的希腊哲学家亚里士多德(Aristotle, 公元前384—公元前322)将数学定义为“数学是量的科学”.

(2)16世纪,英国哲学家弗朗西斯·培根(Francis Bacon, 1561—1626)将数学分为“纯粹数学”与“混合数学”.这里“混合数学”相当于应用数学,而培根所谓的“纯粹数学”则定义为:“处理完全与物质和自然哲学公理相脱离的量的科学.”

(3)在17世纪,笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)认为:“凡是以研究顺序(order)和度量(measure)为目的的科学都与数学有关.”

(4)19世纪,恩格斯(F. V. Engels, 1820—1895)这样来论述数学:“纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系.”根据恩格斯的论述,数学可以定义为:“数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学.”

(5)19世纪晚期,集合论的创始人康托尔(G. Cantor, 1845—1918)曾经提出:“数学是绝对自由发展的学科,它只服从明显的思维,就是说它的概念必须摆脱自相矛盾,并且必须通过定义而确定地、有秩序地与先前已经建立和存在的概念相联系.”

(6)20世纪50年代,苏联一批有影响的数学家试图修正前面提到的恩格斯的定义来概括现代数学发展的特征:“现代数学就是各种量之间的可能的,一般说是各种变化着



的量的关系和相互联系的数学。”^[1]这里的“量”，被赋予了丰富的现代含义：它不仅包括现实世界的各种空间形式与数量关系，而且包括了一切可能的空间形式与数量关系（如几何学中的高维空间、无穷维空间；代数学中的群、域；分析中的泛函、算子……）。

(7) 从 20 世纪 80 年代开始，又出现了对数学的定义所做的符合时代发展的修正的新尝试。主要是一批美国学者，将数学简单地定义为关于“模式”的科学：“数学这个领域已被称为模式的科学，其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性。”这一定义实际上是用“模式”代替了“量”，而所谓的“模式”有着极广泛的内涵，包括了数的模式，形的模式，运动与变化的模式，推理与通信的模式，行为的模式……这些模式可以是现实的，也可以是想象的；可以是定量的，也可以是定性的。

二、数学的内容

一般说来，中学和大学时期接触过的数学可以概括为初等数学和高等数学两大部分。

初等数学的内容主要包括：初等几何学和代数学。几何学是研究空间形式的学科，而代数学是研究数量关系的学科。

初等数学的特点是：第一，所研究的对象是不变的量或不变的图形。初等数学中的典型问题通常包括：给定一个代数方程，要求找出满足该方程的常数（方程的根）；用初等代数中的法则，把所给代数式变换为他式；算出某些几何常量（如长度、面积及体积等）的值，或做出一定的点、线及图形，使其具有所需的属性。第二，所研究的方法具有特殊性。初等代数与几何，是各自按照互不相关的独立路径构筑起来的。初等代数法与初等几何中的综合法，在本质上是没有任何联系的。在初等数学范围内没有统一的原理，使我们能用几何来阐述所有的代数问题；也不能用代数方法通过计算来解决所有的几何问题。

高等数学的内容比初等数学丰富很多，主要包括：一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、空间解析几何和向量代数与无穷级数。

高等数学的特点是：第一，所研究的对象是变化的量。16 世纪，由于航海、采矿、修筑、开凿运河以及天文等方面的实践需要，力学的各个分支发展起来，对于运动的研究成了当时自然科学的中心问题。对于运动的研究、对于各种变化着的量之间的依赖关系的研究，引起了许多新的与以往有本质区别的数学问题，要解决它们，初等数学已经不够用了，需要创立全新的概念与方法，创立出研究现象中各个量之间的变化关系的新数学。变量与函数的新概念应时而生，导致了初等数学阶段向高等数学阶段的过渡。第二，所研究的方法与初等数学截然相反。高等数学是在代数法与几何法密切结合的基础上发展起来的。这种结合首先出现在法国著名的数学家、哲学家笛卡儿所创建的解析几何中。笛卡儿把变量引进了数学，创建了坐标的概念。有了坐标的概念，我们一方面能用代数式子的运算顺利地证明几何定理，另一方面由于几何观念的显明性，我们又能建立新的解析定理，提出新的论点^[2]。

三、数学的特点

数学区别于其他学科的明显特点有三个：高度的抽象性、严谨的逻辑性、广泛的应用性^[3]。



(一) 高度的抽象性

数学的抽象性在小学数学的学习过程中就已经表现出来了,如“ $1+2$ ”既可以理解为1个苹果加2个苹果,也可以理解为1个人加2个人,每次运算并不需要与具体的事物联系起来.数本身是一个抽象的概念,几何中的直线也是一个抽象的概念,所有的数学概念都具有这一特征.在一些如整数、几何图形等最原始的数学概念基础上,又形成了如无理数、有理数、函数、微分、导数和 n 维空间等这一些抽象程度更高的概念.

任何一门学科都具有抽象性,抽象不是数学独有的特性,但是数学的抽象另有其特征,主要表现如下:

(1) 数学的抽象性只保留了量的关系和空间的形式,而舍弃了其他一切;

(2) 数学的抽象是从低到高,从简单到复杂逐步提升的,它达到的抽象程度大大超过了其他学科的一般抽象;

(3) 不仅数学概念是抽象的、思辨的,数学方法也是抽象的、思辨的.自然科学家为了证明自己的结论,常常求助于实验,而数学家们证明定理只需要推理和计算.任何一条新定理的产生,都需要用逻辑的方法证明后才能得到数学家们的承认,该定理才算成立.

英国哲学家怀特海(A. N. Whitehead, 1861—1947)说过:“数学是人类头脑所能达到的最完善的抽象境界.”数学越往前发展,其抽象程度就越高,数学是所有学科中最抽象的一门学科,因此数学与别的学科的共性也最多,它对别的学科也具有更多的指导作用.

(二) 严谨的逻辑性

数学的每一个定理,只有当它已经从逻辑的推论上严格地被证明了的时候,才能在数学中成立.例如,虽然已经精确地测量了成千上万个等腰三角形的底角相等,但等腰三角形两底角相等仍不能作为数学定理而成立.数学定理必须有数学证明.在数学中要证明一个定理,就是要从这个定理的条件和已有的数学公理及定理,用严谨的推理方法导出这个定理中的结论.从中学数学课本中我们就可以看出,数学定义的准确性,数学推理的逻辑严格性和结论的确定性是无可置疑的.但是,数学的严格性不是绝对的、固定不变的,而是相对的、变化发展的.比如,欧几里得(Euclid, 公元前325—公元前265)的《几何原本》是人类历史上的科学杰作,作为逻辑严密的典范一直为后世所推崇.然而,后来人们发现《几何原本》也有不完美的地方,比如有些概念定义得不够明确,基本命题中还缺乏严密的逻辑根据,这样就导致了“非欧几何”的产生,以及希尔伯特公理体系的建立.这正体现了人类认识逐渐深化的过程.

(三) 应用的广泛性

作为“科学的皇后”,数学不但在自然界中有着广泛的应用,而且在人类社会中也有着广泛的应用.无论是在自然科学的各个学科还是在社会科学的各个学科,都可以寻觅到数学的踪影.关于数学应用之广泛,早在1959年5月,我国著名的数学家华罗庚(1910—1985)教授就在《人民日报》上发表了《大哉数学之为用》的文章:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数



学的贡献。”凡是出现“量”的地方就少不了数学，研究量的关系、量的变化等现象都少不了数学。数学成为一切科学部门的得力助手与工具，缺少了它就不能准确地刻画出客观事物的变化，因而就减少了科学预见的可能性，也减弱了科学预见的精确度。

第二节 数学对人类文明的贡献

人类认识的发展基于经验的积累和理性的思维。单靠经验的积累，有时像在黑暗中摸索，不可能有认识上的重大突破。在经验积累的基础上，经过理性的思维才能产生伟大的飞跃。理性思维是数学对人类文明的重要贡献之一。不仅如此，数学对人的思想方法、世界观，乃至对科学、社会进步都起着重大影响。

一、数学对人的思想方法、世界观的影响

20 世纪的数学家兼哲学家庞加莱(J. H. Poincaré, 1854—1912)说：“没有数学这门语言，事物间大多数密切的类似关系将永远不会被我们发现；我们也无从发现世界内部的和谐，而这种和谐正是唯一真正的客观现实——是我们所能达到的唯一真理。”^[2]实际上出现的问题是数学与世界和谐的关系。如果说是数学发现了世界的和谐，则数学优先于世界观；如果说世界的和谐是数学发现的，则世界观优先于数学。无论是哪一种情况，数学对世界观都起到了重大影响。

(一) 数学影响着人们的逻辑思维

从逻辑上说，数学确实是最讲究普遍联系的。数学的最大特征之一是抽象，因而数学广泛存在于众多的事物中。事物与事物的联系多少靠什么来判断呢？靠的是共性与个性，或者称为内涵与外延。表面的东西通常反映的是个性，它会掩盖共性。数学抽象性的主要特征就是从个性中发现共性。

(二) 数学影响着唯物主义的认识论

数学最正确、最客观地体现了辩证唯物主义思想。辩证唯物主义是讲联系，讲统一的，但有些观点过分强调“本质联系”中的“本质”，犯了形而上学的错误。实际上，本质都是从联系中发现的，而不是事先就知道的。数学方法的内涵之一是建立对应关系(联系)，通过对应关系去发现共性(本质)。例如，数学中的同构、同胚、同调、同伦等一系列观念和方法把许多貌似不同的东西联系起来，通过这些联系我们可以发现许多本质的内容。

(三) 数学影响着唯物主义的世界观

唯物论的观点已经被有意或无意地曲解了。一个极端是认为认识必定来源于物质世界而且必定直接来自物质世界；另一个极端是没有实践基础就要求人们解决思想认识问题，认为只要解决了思想认识问题就解决了一切。数学科学的事实与发展排除了这两种极端。数学研究变化。数学中的微积分强有力地表现变化，几乎任何变动的过程都需要微积分来表现或刻画。数学也能把握相对的静止，在变化中发现不变，从而更好地把握



变化. 例如, 代数中有“恒等变换”, 几何中有变换群, 微积分中有拉普拉斯变换、傅里叶变换、欧拉变换等.

科学技术的飞速发展及其在社会发展中的重要地位, 对公民的科学素养提出了更高的要求, 而科学、技术与数学的关系, 使得数学素养成为公民基本素养不可或缺的重要部分. 王世强在谈到数学对人类理性精神的作用时指出: “数学教育是十分重要的……其重要性一方面是由于数学的广泛适用性……另一方面则在于数学的思维训练有助于培养和加强人们的理性探索精神. 关于理性精神, 在我国传统文化中也是有不少体现的, 但不如西方的现代科学特别是现代数学中反映得丰富而深入.”

二、数学对科学、社会进步的影响

20 世纪中叶以来, 纯粹数学的发展依然强劲, 费马定理的证明轰动世界, 哥德巴赫猜想正以百万美元的悬赏征求解决; 与此同时, 数学家正在运用数学和计算机技术解决各式各样的实际问题. 随着经典数学的繁荣和统一, 许多新的应用数学方法产生, 特别是计算机的出现及其与数学的结合, 使得 20 世纪中叶以来, 数学与社会的联系更加直接, 对社会的发展起着空前巨大的作用.

(一) 万有引力定律

基于开普勒(J. Kepler, 1571—1630)行星运动的三大定律和哥白尼的日心说, 牛顿(I. Newton, 1643—1727)发现了万有引力定律. 这是人类对宇宙认识的一次伟大革命. 牛顿把他最重要的著作命名为“自然哲学的数学原理”, 是因为他发现新宇宙的思维方式是数学的思维方式.

(二) 海王星的发现

海王星(Neptune)是八大行星中的远日行星, 按照行星与太阳的距离排列, 海王星是第八颗行星, 直径上是第四大行星. 这个被认为太阳系中距离地球最远的行星是在 1846 年 9 月 23 日被发现的, 也是唯一一颗利用数学计算结果预测而非有计划的天文观测发现的行星.

1871 年, 天王星被发现后, 英国天文学家亚当斯(J. C. Adams, 1819—1892)和法国天文学家勒维耶(Le Verrier, 1811—1877)分析了天王星运动的不规律性, 得出结论: 这种不规律性是由其他行星的引力而引起的. 勒维耶根据力学法则计算出这颗行星应该位于何处, 并把这个结果告诉了德国柏林天文台助理员伽勒(J. G. Galle, 1812—1910), 而伽勒果然在勒维耶指出的位置上看到了这颗行星——一颗已有星图上没有的行星——海王星.

海王星的发现是数学计算的胜利.

(三) 爱因斯坦的相对论

相对论被认为是宇宙观的一次伟大革命, “闵可夫斯基(Minkowski)空间”为爱因斯坦的狭义相对论提供了合适的数学模型, 而黎曼(G. F. B. Riemann, 1826—1866)的几何和不变量理论为爱因斯坦的广义相对论提供了绝妙的描述工具. 爱因斯坦的时空观认



为时间和空间是互相联系的，四维空间的洛伦兹变换是这种数学模型的表现形式，促使爱因斯坦做出这一伟大贡献的仍是数学的思维方式。爱因斯坦发现自己过去曾经轻视数学是一个极大的错误，他后来反省说：“在几年独立的科学研究后，我才逐渐明白了在科学的探索过程中，通向更深入的道路是同最精密的数学方法联系在一起的。”

(四) 电磁波的发现

英国物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831—1879)概括了由实验建立起来的电磁现象规律，并把这些规律表达为“方程的形式”。他用纯粹数学的方法从这些方程推导出可能存在着电磁波并且这些电磁波应该以光速传播着。据此，他提出了光的电磁理论，这个理论后来被全面地发展和论证了。除此之外，麦克斯韦的结论还推动了人们去寻找纯电起源的电磁波。例如，由振动发电所发射的电磁波。这样的电磁波为赫兹(H. R. Hertz, 1857—1894)所发现。而不久之后，亚历山大·斯塔帕诺维奇·波波夫(Александр Степанович Попов, 1859—1906)就找到了电磁振荡的激发、发送和接收的办法，并把这些办法带到许多应用部门，为无线电技术奠定了基础。

现在已进入信息时代，无线电技术对于人类生活是何等重要人人都已体会到。但是，我们可不要忘记，纯粹数学在这里曾起过巨大作用。

(五) 计算机的发明

英国数学家图灵(A. Turing, 1912—1954)根据计算机科学中的一个极为重要的概念——“可计算性”，提出了一种理想的计算机模型，即今天所说的“图灵机”。图灵机从理论上预示着设计制造电子计算机的可能性，后由冯·诺依曼(J. von Neumann, 1903—1957)制造出了第一台电子计算机。

以上这些都显示出数学的广泛应用和巨大威力。如今，电磁波和计算机已经走进了千家万户，从根本上改变了人类的生活，并影响着整个社会的人类文明。

第三节 数学发展简史

一、为什么学习数学史

数学史研究数学概念、数学方法和数学思想的起源与发展，及其与社会政治、经济和一般文化的联系。英国科学史家丹皮尔说过：“再没有什么故事能比科学思想发展的故事更有魅力了。”数学是历史悠久的人类认识领域之一。从远古屈指计数到现代高速电子计算机的发明，从量地测天到抽象严密的公理化体系，在五千余年的数学历史长河中，重大数学思想的诞生与发展，确实构成了科学史上最富有理性魅力的题材。

与其他学科相比，数学是一门历史性或者说累积性很强的科学。重大的数学理论总是在继承和发展原有理论的基础上建立起来的。它们不仅不会推翻原有的理论，而且总是包容原先的理论。例如，数的理论的演进就表现出明显的累积性；在几何学中，非欧几何可以看成是欧几里得几何的拓展；溯源于初等代数的抽象代数并没有使前者被淘汰；同样，现代分析中诸如函数、导数和积分等概念的推广均包含了古典定义作



为其特例……。可以说,在数学的进化过程中,几乎没有发生过彻底推翻前人建筑的情况。如果我们对比天文学的“地心说”、物理学的“以太说”和化学的“燃素说”的命运,就可以看清数学发展不同于其他学科的这种特点。

因此,有的数学史家认为,“在大多数的学科里,一代人的建筑为下一代人所拆毁,一个人的创造被另一个人所破坏.唯独数学,每一代人都在古老的大厦上添加一层楼”。这种说法虽然有些绝对,但却形象地说明了数学这幢大厦的累积特性.当我们为这幢大厦添砖加瓦时,有必要了解它的历史.按美国《数学评论》杂志的分类,当今数学包括了约60个二级学科,400多个三级学科,更细的分类已难以统计.面对着如此庞大的知识系统,职业数学家越来越被限制于一、二个专门领域.数学发展的高速度和专门化特征,已经使得今后很难出现像欧拉、高斯(K. F. Gauss, 1777—1855)等纵横捭阖多个数学分支并均取得丰硕成果的数学大师,法国现代数学家庞加莱曾被称为“最后一位数学通才”。

为什么要学习数学史,具体说来,有以下两方面的原因。

(一)更全面、更深刻地了解数学

从逻辑上说,数学确实是最讲究普遍联系的.每一门学科都有它的历史,文学有文学史,哲学有哲学史,天文学有天文学史,等等.同样,数学有它自己的发展历程,也有着它自身的历史.对于每一个希望了解整个人类文明史的人来说,数学史是必读的篇章.数学史在整个人类文明史上的这种特殊地位,是由数学作为一种文化的特点决定的.它的特点是:①数学以抽象的形式,追求高度精确、可靠的知识;②在对宇宙世界和人类社会的探索中,数学追求的是最大限度的一般性模式,特别是一般性算法的倾向;③最后,数学作为一种创造性活动,还具有艺术的特征,这就是对美的追求.英国数学家、哲学家罗素(B. Russel, 1872—1970)说过:“数学不仅拥有真理,而且拥有至高无上的美——一种冷峻严肃的美。”

数学史是活生生的、有血有肉的.无论是概念还是体系,无论是内容还是方法,都只有在与其发展过程相联系时,才容易被理解.可以说,不懂得数学史,就不能真心地理解数学.数学课本上的数学,经过多次加工,已经不是原来的面貌,“刀斧”的痕迹,清晰可见.数学教师要把课本上的内容放到历史的背景上考察,才能求得自己的理解,然后,才有可能帮助学生理解.

(二)总结经验教训,探索发展规律

我国自古以来就非常重视历史,“前事之不忘,后事之师”(《战国策·赵策一》)早已成为人们的共识.英国哲学家培根的名言“历史使人明智”(histories make men wise)也是人尽皆知的成语.数学有悠久的历史,它的成长道路是相当曲折的.有时兴旺发达,有时衰败凋残.探索它的发展规律,可以指导当前的工作,使我们少走或不走弯路,更好地做出正确的判断,制定合理的政策.

数学家庞加莱曾经说过:“若想预见数学的将来,正确的方法是研究它的历史和现状.”法国人类学家列维-斯特劳斯也曾经说过:“如果他不知道他来自何处,那就没有人知道他去向何方.”数学史将告诉我们数学来自何处、数学是如何达到今天这样的高度,以及数学将去往何方^[4].



二、数学史的划分

数学史的划分一般可以按照如下线索：①按时代顺序；②按数学对象、方法等本身的质变过程；③按数学发展的社会背景。一般数学通史著作往往采取以某一线索为主，同时兼顾其他因素的做法。分期问题的深入讨论属于数学史专门研究的范围，而且存在许多争议。我们一般以数学思想为主，综合参考了各方面的论述，做出如下的分期：

(1) 数学的起源与早期发展(公元前 6 世纪前)。

(2) 初等数学时期(公元前 6~16 世纪)：①古代希腊数学(公元前 6~6 世纪)；②中世纪东方数学(3~15 世纪)；③欧洲文艺复兴时期(15~16 世纪)。

(3) 近代数学时期(变量数学，17~18 世纪)。

(4) 现代数学时期(1820 年至今)：①现代数学酝酿时期(1820~1870 年)；②现代数学形成时期(1870~1940 年)；③现代数学繁荣时期(当代数学时期，1950 年至今)。

三、数学的发展史

(一) 第一个时期——数学的起源与早期发展

这是人类建立最基本的数学概念的时期。人类从数数开始便逐渐建立了自然数的概念、简单的算法，并认识了最简单的几何形式，那时，算术与几何还没有分开，彼此紧密地交错着。数学文明的发祥可以追溯到 4000 年前，甚至更久，世界公认的四大文明古国——中国、古埃及、古巴比伦和古印度，其文明程度的主要标志之一就是数学的萌芽。

1. 古埃及——几何的故乡

古埃及人已经掌握了数的加、减、乘、除四种基本运算，会算一些平面图形的面积及一些立体的体积。埃及的金字塔，建于公元前 3000 年至公元前 1000 多年，这些古建筑留下了许多数学之谜：塔底每边长 230 米，误差小于 20 厘米。塔高 146.5 米，东南与西北角误差仅 1.27 厘米，直角误差仅有 12"，方位角误差在 2'到 5'之间。这样的精确度，现代建筑也望尘莫及。用石达 230 万块之多，重量从 2.5 吨到 50 吨不等，石块间接缝处连铅笔刀也难插入。塔高的 10 亿倍恰好等于地球到太阳的距离；底边与高度之比的 2 倍近似等于 3.14159，而这是 3 世纪时的人才得到的圆周率的近似值。穿过塔的子午线恰好把地球上的陆地和海洋分为均匀的两半，塔的重心正好位于各大陆引力的中心线上。

古埃及人靠什么计算方法和计算工具达到如此的精确度呢？科学研究表明，他们已具有丰富的天文学和数学知识。

2. 古巴比伦——代数的源头

古巴比伦的位置在美索不达米亚最靠近底格里斯河和幼发拉底河河床的地方。公元前 1700 年左右，阿摩利人汉谟拉比(Hammurabi)王统治时期，文化得到高度的发展，这位君主以制定一部著名的法典——《汉谟拉比法典》而著称，这个时期就是所称的古巴比伦王国。公元前 540 年左右，新巴比伦帝国为居鲁士(Cyrus)统治下的波斯人所征服。公元前 330 年，希腊军事领袖亚历山大大帝(Alexander the Great)征服了这个地区。历史中



所讲的巴比伦数学也到此为止。

古巴比伦人是具有高度计算技巧的计算家，他们会开平方、开立方，其计算程序是借助乘法表、倒数表、平方表和立方表等数表来实现的，还知道二次方程的求根公式。古巴比伦人书写数字的方法更值得我们注意，他们引入了以 60 为基底的位值制（60 进制），希腊人、欧洲人直到 16 世纪还在数学计算和天文计算中运用这个系统，直至今日 60 进制仍被广泛应用于角度、时间等的度量上。

3. 古印度——阿拉伯数字的诞生地

古印度数学的发展晚于古埃及、古巴比伦、希腊和中国，它的传统数学在算术及代数方面有相当的成就，包括建立完整的十进制记数系统，引进负数的观念及计算，使代数半符号化，提供开方的方法，解二次方程式及一次不定方程式等。印度人的特殊贡献有：阿拉伯数字，他们大约在公元前 4 世纪就开始使用这种数字，直到 8 世纪才传入阿拉伯国家，后经阿拉伯人传入欧洲。用符号“0”表示零是印度人的一大发明。

拉普拉斯 (P. S. Laplace, 1749—1827) 对十进位值制记数法的评价：“用十个记号来表示一切的数，每个记号不但有绝对的值，而且有位置的值，这种巧妙的方法出自印度。这是一个深远而又重要的思想，它今天看来如此简单，以致我们忽视了它的真正伟绩。但恰恰是它的简单性以及一切计算都提供了极大的方便，才使我们的算术在一切有用的发明中居于首位；而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两位人物阿基米德和阿波罗尼斯的天才思想的关注时，我们更感到这成就的伟大了。”

(二) 第二个时期——初等数学时期

初等数学时期也称为常量数学的时期。这个时期的基本成果构成了现在中学数学的主要内容。它大致是从公元前 6 世纪开始，直到 16 世纪，前后持续了 2000 多年。在这个时期逐渐形成了初等数学的主要分支：算术、几何、代数、三角等。

按照历史条件不同，可以把初等数学史进一步分为三个不同的历史时期：古希腊时期（公元前 6—前 3 世纪）数学、中世纪（3—15 世纪）东方数学和欧洲文艺复兴时期（15—16 世纪）的数学。

1. 古希腊数学

希腊数学一般指从公元前 600—前 300 年，活动于希腊半岛、爱琴海区域、马其顿与色雷斯地区、意大利半岛、小亚细亚及非洲北部的数学家们创造的数学。传说中泰勒斯（约公元前 624—公元前 547）曾证明了下列四条定理：

- (1) 圆的直径将圆分为两个相等的部分。
- (2) 等腰三角形两底角相等。
- (3) 两相交直线形成的对顶角相等。
- (4) 如果一个三角形有两角、一边分别与另一个三角形的对应角、边相等（如果两个三角形分别有两角、一边对应相等），那么这两个三角形全等。

希腊论证数学的另一位祖师是毕达哥拉斯（约公元前 580—公元前 500）。毕达哥拉斯与泰勒斯一样也是扑朔迷离的传说人物。二者都没有著作留世，我们甚至不知道他们是否写过书面的著作。今人对毕达哥拉斯生平与工作的了解，主要也是通过普洛克鲁斯



等关于希腊数学著作的评注，即今天所称的毕达哥拉斯学派(Pythagoras)。

希腊波斯战争(公元前 492~公元前 449 年)以后，雅典成为希腊民主政治与经济文化的中心，希腊数学也随之走向繁荣，学派林立，主要有伊利亚学派、诡辩学派、雅典学院(柏拉图学派)和亚里士多德学派等。上述诸派多以哲学探讨为主，但他们的研究活动极大地加强了希腊数学的理论化色彩。

从公元前 338 年希腊诸邦被罗马控制，至公元前 30 年罗马消灭最后一个希腊化国家托勒密王国的 300 余年，史称希腊数学的“黄金时代”。这一时期希腊数学的中心从雅典转移到了亚历山大城。公元前 300 年左右，亚历山大兴建艺术宫(博物馆)和图书馆，提倡学术，罗致人才，使亚历山大成为希腊文化的首府，那里学者云集，先后出现了欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯(Apollonius，公元前 262—公元前 190)三大数学家，他们的成就标志着古希腊数学到达巅峰。

2. 中世纪东方数学

随着希腊科学的终结，在欧洲出现了科学萧条，数学发展的中心移到了印度、中亚细亚和阿拉伯国家。在这些地方从 5 世纪到 15 世纪的 1000 年中间，数学主要由于计算的需要，特别是天文学的需要而得到发展。印度人发明了现代记数法(后来传到阿拉伯，从发掘出来的材料来看，中国是使用十进制最早的国家)，引进了负数，并把正数与负数的对立和财产与债务的对立及直线上两个方向的对立联系了起来。他们开始像运用有理数一样运用无理数，他们给出了表示各种代数运算包括求根公式的符号。由于他们没有对无理数和有理数的区别感到困惑，从而为代数打开了真正的发展道路。

“代数”这个词本身起源于 9 世纪的数学家和天文学家阿尔·花拉子密(Al-Khwarizmi，约 780—约 850)——代数与算术的整理者，被誉为“代数之父”。花拉子密的著作基本上建立了了解方程的方法。从这时起，求方程的解作为代数的基本特征被长期保持了下来。他的代数著作在数学史上起了重大作用，因为这部作品后来被翻译成拉丁语，曾长期作为欧洲的主要教科书。

应该指出，当时我国的算术和代数水平已经达到了很高的水平。在公元前 2 世纪到公元 1 世纪已有了三元一次联立方程组的解法。同时在历史上第一次利用负数，并且叙述了对负数进行运算的规则，也找到了求平方根与立方根的解法。

中亚细亚的数学家们找到了求根和一系列方程的近似解的方法，找到了“牛顿二项式定理”的普遍公式，他们有力地推进了三角学，把它建成了一个系统，并造出了非常准确的正弦表。这时中国科学的成就开始传入了邻国。在 6 世纪左右我国已经会解简单的不定方程，知道几何中的近似计算以及三次方程的近似解法。

3. 欧洲文艺复兴时期的数学

到了 16 世纪，缺少的主要是对数和虚数，以及字母符号系统。正如在远古时代，为了运用整数，应该制定表示它们的符号一样，现在为了运用任意数并对它们给出一般运算规则，就应该制定类似的符号。这个任务从希腊时代就已经开始，直到 17 世纪才完成，最终在笛卡儿等的工作中形成了现代符号系统。

在欧洲文艺复兴时期，欧洲人向阿拉伯学习，并根据阿拉伯文的翻译熟识了希腊科